Un corrigé

Partie I. Préliminaires

1. $\mathbb{M}_n$ est vide si, et seulement si, $R_u = 0$. Pour la suite $u = (k!)_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{M}_u = \emptyset$.
2. Si $R_u = 0$ alors $\mathbb{M}_u = \emptyset \neq \{0_n\}$. Si $R_u > 0$, alors la matrice diagonale $D = \text{diag}\left(\frac{R_u}{2}, 0, \dots, 0\right)$ est dans $\mathbb{M}_u$ et donc $\mathbb{M}_u \neq \{0_n\}$.
3. Si $R_u = +\infty$, alors $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathbb{M}_u$ et donc $\mathbb{M}_u = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si $\mathbb{M}_u = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathbb{M}_u$ est un ensemble non vide et stable par toute combinaison linéaire, en particulier par l'addition.
Si la propriété (iii) est vérifiée, alors il existe une matrice non nulle $A \in \mathbb{M}_u$. Par stabilité et par principe de récurrence, on a $pA \in \mathbb{M}_u$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\varrho(pA) = p\varrho(A) < R_u$ ce qui montre par passage à la limite que $R_u = +\infty$.

Ainsi, les trois propriétés sont équivalentes. La suite $\left(\frac{1}{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie les trois propriétés.

4. Soit $A \in \mathbb{M}_u(v)$ pour tout suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ vérifiant $R_v > 0$. En particulier, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{M}_n(v_p)$ où $v_p = \left(p^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$, donc $\varrho(A) < R_{v_p} = \frac{1}{p}$, donc nécessairement $\varrho(A) = 0$. Ainsi $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et par conséquent A est une matrice nilpotente.
Si A est nilpotente, alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et donc $\varrho(A) = 0$, ce qui montre que $A \in \mathbb{M}_u(v)$ pour tout suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ telle que $R_v > 0$.
5. On rappelle qu'une série entière $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k z^k$ et sa série dérivée $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k u_k z^{k-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1) u_{k+1} z^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^{(1)} z^k$ ont même rayon de convergence. Ainsi $D_{u^{(1)}} = D_u$, la propriété en question découle ainsi par le principe de récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.
6. Le rayon de convergence de la somme et le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k z^k$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k z^k$ est au moins égal à $\min(R_u, R_v)$. Ainsi, si $A \in \mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$, alors $\varrho(A) < \min(R_u, R_v)$. Donc nécessairement, $\varrho(A) < R_{u+v}$ et $\varrho(A) < R_{u*v}$, c'est-à-dire $A \in \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u*v)$. D'où :

$$\mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v) \subset \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u*v).$$

7. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que A et B sont simultanément trigonalisables. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Soit $n \geq 1$. Supposons que deux matrices d'ordre n qui commutent soient simultanément trigonalisables. Soient A et B deux matrices d'ordre $n+1$ telles que $AB = BA$.
 - A et B ont au moins un vecteur propre en commun. En effet, A admet au moins une valeur propre λ . Soit E_λ le sous-espace propre de A associé à λ . A commute avec B et donc laisse stable E_λ . La restriction de B à E_λ admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à A et B .
 - Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de A et B . Soit X un vecteur propre commun à A et B . On complète la famille libre (X) en une base $\mathcal{B} = (X, Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Dans la base $\mathcal{B}$, les matrices A et B sont donc semblables respectivement à $M = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \mu & (*) \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$ où M_1 et N_1 sont de taille n .

Un calcul par blocs montre que $M_1 N_1 = N_1 M_1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice inversible de taille n inversible P_1 et deux matrices triangulaires de taille n supérieures T_1 et T'_1 telles que $P_1^{-1} M_1 P_1 = T_1$ et $P_1^{-1} N_1 P_1 = T'_1$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$. P est inversible de taille $n + 1$ car $\det P = \det P_1 \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1} M P$ et $P^{-1} N P$ sont triangulaires supérieures. P est donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base de trigonalisation simultanée de A et B .

• Donc si $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et $\text{Sp}(B) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, alors AB est semblable à une matrice de type

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \text{Sp}(AB) = \{\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n\} \text{ et par conséquent}$$

$$\rho(AB) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i \mu_i| \leq \rho(A) \rho(B) < R_u^2 \leq R_u,$$

donc $AB \in M_n(u)$.

Partie II. Fonctions de matrices

8. D'après le théorème de Cayley-Hamilton le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme annulateur de A et non nul, donc $\chi_A \in \mathcal{V}$, d'où $\mathcal{V} \neq \emptyset$.
9. On pose $I = \{P \in \mathbf{C}[X] \mid P(A) = 0\}$. On voit que I est un idéal non nul ($\chi_A \in I$) de $\mathbf{C}[X]$. L'anneau $\mathbf{C}[X]$ étant principal, il existe un unique polynôme φ_A , unitaire, tel que $\varphi_A(A) = 0$. C'est le polynôme unitaire de plus bas degré annulant A .
10. Soit P un polynôme annulateur de A . La division euclidienne de P par φ_A donne $P = Q\varphi_A + R$, donc $R = P - Q\varphi_A$, donc R est un polynôme annulateur de degré inférieur à celui de φ_A , donc $R = 0$ et par suite φ_A divise P .
11. Soit λ une valeur propre de A , il existe donc un vecteur X non nul tel que $AX = \lambda X$. Une récurrence immédiate prouve que pour tout entier k strictement positif, $A^k = \lambda^k X$, d'où on déduit que pour tout polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$, on a $P(A)X = P(\lambda)X$.

En appliquant ce résultat avec le polynôme minimal, on obtient $0 = \varphi_A(A)X = \varphi_A(\lambda)X$. Comme le vecteur X est non nul on en déduit que $\varphi_A(\lambda) = 0$.

Réciproquement, soit λ une racine de φ_A . Le polynôme $X - \lambda$ divise φ_A donc, cela prouve l'existence d'un polynôme Q tel que $\varphi_A(X) = (X - \lambda)Q(X)$. Alors on a $(A - \lambda I_n)Q(A) = 0$. Comme le degré de Q est strictement inférieur au degré de φ_A , Q n'est pas un polynôme annulateur de A . Il en résulte que $Q(A)$ n'est pas nul et que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et par conséquent λ est une valeur propre de A , c'est-à-dire une racine de χ_A .

12. On reprend la même démonstration avec $I = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(A) = 0\}$ (remplacer $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$), en remarquant que, par définition, le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme à coefficients réels et dans I .
13. On peut vérifier que l'application T est linéaire. Comme $\dim \mathbf{C}_{m-1}[X] = \dim \mathbf{C}^m$, alors T est un isomorphisme est équivalent à T surjective ou injective. Donc il suffit de montrer que T est injective. Soit donc $P \in \mathbf{C}_{m-1}[X]$ tel que $T(P) = 0$, alors

$$\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket, P^{(k)}(\lambda_i) = 0.$$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, λ_i est une racine de P , d'ordre de multiplicité au moins égal à m_i , on en déduit que le polynôme $(X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_l)^{m_l}$, c'est-à-dire φ_A , divise P et comme ce dernier est de degré $m - 1$ et P de degré inférieur ou égal à $m - 1$, alors P est nul. D'où l'injectivité de T .

14. D'après la question précédente il existe un seul polynôme Q tel que $u(A) = Q(A)$. Si $P = Q$, la propriété est vraie. Supposons maintenant $P \neq Q$ et que $u(A) = P(A)$. En particulier $P(A) = Q(A)$ et donc φ_A divise $P - Q$, et ainsi il existe un polynôme $Q_1 \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P - Q = Q_1 \varphi_A$. Soit $k \in \mathbf{N}$, alors par la formule de Leibniz, on a

$$(*) \quad P^{(k)} - Q^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q_1^{(i)} \varphi_A^{(k-i)}.$$

En évaluant alors la relation (*) en λ_i ($i \in \llbracket 1, l \rrbracket$) pour tout $k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket$,

$$P^{(k)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).$$

Inversement, par division euclidienne de P par φ_A il existe Q_2 et R des polynômes tels que $P = Q_2\varphi_A + R$ avec $R \in \mathbf{C}_{m-1}[X]$. Comme $\varphi_A(A) = 0$, alors $P(A) = R(A)$. D'autre part, pour chaque $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, λ_i est une racine d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à m_i de $P - R$, d'où :

$$\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket, R^{(k)}(\lambda_i) = P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).$$

Ainsi, par unicité de Q (la question 13.), $u(A) = P(A) = R(A)$.

15. Dans ce cas $\varphi_{\alpha I_n} = X - \alpha$, donc le reste de la division euclidienne par $\varphi_{\alpha I_n}$ est un polynôme constant. Donc il existe une constante $c \in \mathbf{C}$ telle que $u(\alpha I_n) = cI_n$, avec $c = U(\alpha)$. D'où :

$$u(\alpha I_n) = U(\alpha)I_n.$$

16. Puisque $\alpha \neq \beta$, alors $\varphi_A = (X - \alpha)(X - \beta)$. Donc le reste de la division euclidienne par φ_A est de la forme $aX + b$. D'où :

$$u(A) = aA + bI_n$$

Les deux constantes a et b sont solutions du système d'équations $\begin{cases} a\alpha + b = U(\alpha) \\ a\beta + b = U(\beta) \end{cases}$, donc $a = \frac{U(\alpha) - U(\beta)}{\alpha - \beta}$

et $b = U(\alpha) - a\alpha = U(\alpha) - \frac{U(\alpha) - U(\beta)}{\alpha - \beta}\alpha = \frac{U(\beta)\alpha - U(\alpha)\beta}{\alpha - \beta}$. Ainsi :

$$u(A) = \frac{U(\alpha) - U(\beta)}{\alpha - \beta}A + \frac{U(\beta)\alpha - U(\alpha)\beta}{\alpha - \beta}I_n = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \frac{U(\beta)\alpha - U(\alpha)\beta}{\alpha - \beta} \\ 0 & U(\beta) \end{pmatrix}$$

17. (a) Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$. En particulier, comme $\rho(M) = \max(\rho(A), \rho(B)) < R_u$, il vient que $M \in \mathcal{M}_{2n}(u)$. Montrons que $\varphi_M = \text{ppcm}(\varphi_A, \varphi_B)$ le ppcm de φ_A et φ_B . Notons $Q = \text{ppcm}(\varphi_A, \varphi_B)$. Écrivons $\varphi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ et $\varphi_B = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(B)} (X - \lambda)^{\beta_\lambda}$. Notons pour simplifier $S = \text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B)$ et

pour tout $\lambda \in S$, $\gamma_\lambda = \max(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$. On note de plus $Q = \prod_{\lambda \in S} (X - \lambda)^{\gamma_\lambda}$ et $\sigma = \sum_{\lambda \in S} \gamma_\lambda$.

En effet, on a $Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} = 0$ car Q est un multiple de φ_A et φ_B , donc φ_M divise Q . Or s'il existe $\lambda \in S$, tel que la multiplicité de λ dans φ_M est strictement inférieure à γ_λ , alors $\varphi_M(A) \neq 0$ ou $\varphi_M(B) \neq 0$, puisque φ_A ou φ_B ne divisera par φ_M . Donc $\varphi_M = Q$.

Par la question 13., il existe un unique polynôme $R \in \mathbf{C}_{\sigma-1}[X]$ tel que pour tout $\lambda \in S$, et pour tout $k \in \llbracket 1, \gamma_\lambda - 1 \rrbracket$, $R^{(k)}(\lambda) = U^{(k)}(\lambda)$. En particulier, R vérifie ces conditions pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et pour tout $k \in \llbracket 1, \alpha_\lambda - 1 \rrbracket$ ainsi que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(B)$ et tout $k \in \llbracket 1, \beta_\lambda - 1 \rrbracket$. Donc R vérifie les conditions de la question 14. pour A et pour B . Donc $u(A) = R(A)$ et $u(B) = R(B)$.

- (b) D'après la question précédente il existe $R \in \mathbf{C}[X]$ tel que $u(AB) = R(AB)$ et $u(BA) = R(BA)$. Posons

$$R = \sum_{i=0}^d a_i X^i, \text{ donc}$$

$$Au(BA) = A \sum_{i=0}^d a_i (BA)^i = \sum_{i=0}^d a_i (AB)^i A = u(AB)A.$$

18. Comme $A \in \mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$, alors $A \in \mathbb{M}_n(u * v)$ (d'après la question 6.). D'autre part, pour tout $t \in \mathbf{R}$ tel que $|t| < \min(R_u, R_v)$, on note $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k$, $V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k t^k$ et $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k t^k$ où $w_k = \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j}$. On sait que $W = UV$ et qu'il existe des polynômes R_1, R_2 et R tels que

$$(u * v)(A) = R(A)$$

où $\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket$, $R_1^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$, $R_2^{(k)}(\lambda_i) = V^{(k)}(\lambda_i)$ et $R^{(k)}(\lambda_i) = W^{(k)}(\lambda_i)$. Mais, pour tout $\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, m_i - 1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} W^{(k)}(\lambda_i) &= \sum_{j=0}^k \mathfrak{C}_k^j U^{(j)}(\lambda_i) V^{k-j}(\lambda_i) \\ &= \sum_{j=0}^k \mathfrak{C}_k^j R_1^{(j)}(t) R_2^{k-j}(\lambda_i) \\ &= (R_1 R_2)^{(k)}(\lambda_i). \end{aligned}$$

Donc le polynôme $R_1 R_2$ vérifie les conditions de la question **14.**, d'où :

$$(u * v)(A) = (R_1 R_2)(A) = R_1(A) R_2(A) = u(A) v(A).$$

Partie III. Cas de matrices diagonalisables

19. Puisque A est diagonalisable, alors le polynôme minimal est à racines simples, donc

$$\varphi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_l).$$

20. (a) Les polynômes Q_k^A , $k = 1, 2, \dots, l$ forment une base de $\mathbf{C}_{l-1}[X]$. En effet, puisqu'il s'agit d'une famille à l éléments il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient donc $a_1, a_2, \dots, a_l \in \mathbf{C}$ tels que $\sum_{k=1}^l a_k Q_k^A(X) = 0$, ce qui

$$\text{entraîne } \forall k \in \llbracket 1, l \rrbracket, \sum_{k=1}^l a_k Q_k(\lambda_j) = \sum_{k=1}^l a_k \delta_{kj} = 0, \text{ d'où } a_k = 0.$$

Maintenant soit $R \in \mathbf{C}_{l-1}[X]$ tel que $u(A) = R(A)$, donc il existe des constantes $a_1, a_2, \dots, a_l$ telles que $R(X) = \sum_{k=1}^l a_k Q_k^A(X)$ avec $a_k = R(\lambda_k) = U(\lambda_k)$. D'où :

$$u(A) = R(A) = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^A(A).$$

(b) Puisque A est diagonalisable, on a $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{k=1}^l \ker(A - \lambda_k \mathbf{I}_n)$. Posons $p_i = Q_i^A(A)$ pour tout $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$. D'après

l'égalité $1 = \sum_{k=1}^l Q_k^A(X)$ on a $\mathbf{I}_n = \sum_{k=1}^l p_k$ et pour $i \neq j$, on a :

$$p_i p_j = Q_i^A(A) Q_j^A(A) = 0$$

car $Q_i^A Q_j^A$ est un multiple de φ_A . L'égalité $\mathbf{I}_n = \sum_{k=1}^l p_k$ entraîne, en multipliant par $p_i = \sum_{k=1}^l p_k p_j = p_i^2$. Donc p_i est un projecteur.

Précisons maintenant le noyau et l'image de p_i . On a $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{k=1}^l \text{Im } p_k$. Si $x \in \text{Im } p_i$, alors il existe $y \in \mathbf{C}^n$ tel que $x = p_i(y)$, d'où :

$$(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)(x) = (A - \lambda_i \mathbf{I}_n) Q_i^A(A)(x) = 0$$

car $(X - \lambda_i)Q_i^A(X)$ est un multiple de φ_A , donc $\text{Im } p_i \subset \ker(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$. Dans ces conditions les deux décompositions $\bigoplus_{i=1}^l \text{Im } p_i = \bigoplus_{i=1}^l \ker(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$ de $\mathbf{C}^n$ coïncident nécessairement. D'où $\text{Im } p_i = \ker(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$, ainsi

Q_i^A est la projection sur $\ker(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$ parallèlement à $\bigoplus_{k=1, k \neq i}^l \ker(A - \lambda_k \mathbf{I}_n)$.

(c) C'est déjà démontré dans la question précédente.

21. On remarque que A et BAB^{-1} ont même polynôme minimal (tout polynôme anulateur A est un anulateur de BAB^{-1} et inversement), d'où $Q_k^{BAB^{-1}} = Q_k^A$. Ainsi,

$$u(BAB^{-1}) = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^{BAB^{-1}}(BAB^{-1}) = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^A(BAB^{-1}) = B \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^A(A) B^{-1} = Bu(A)B^{-1}.$$

22. (a) On a $u(D) = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^D(D)$. Comme D est une matrice diagonale, il est de même de $Q_k^D(D)$, donc $u(D)$ est une matrice diagonale. De plus

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, [u(D)]_{ii} = \sum_{k=1}^l U(\lambda_k) Q_k^D([D]_{ii})$$

(b) On a $u(A) = Su(D)S^{-1} = S \text{diag}(u(D)_{11}, u(D)_{22}, \dots, u(D)_{nn}) S^{-1}$.

Partie IV : Application à des cas particuliers

23. (a) H est une matrice nilpotente d'indice n , donc $\varphi_H(X) = X^n$.
 (b) On a $(A - \alpha \mathbf{I}_n)^n = H^n = 0$ et $(A - \alpha \mathbf{I}_n)^{n-1} = H^{n-1} \neq 0$, donc le reste de la division euclidienne par le polynôme minimal φ_A est un polynôme R de degré inférieur ou égal à $n - 1$. D'où $u(A) = R(A)$ avec $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, R^{(k)}(\alpha) = U^{(k)}(\alpha)$.

La formule de Taylor polynômiale pour R s'écrit $P(X + \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R^{(k)}(\alpha)}{k!} X^k$, d'où :

$$R(A) = R(H + \alpha \mathbf{I}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k$$

D'où

$$u(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k.$$

D'autre part, on peut vérifier par récurrence que $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket,$

$$H^k = \begin{pmatrix} 0_{n-k, k} & \mathbf{I}_{n-k} \\ 0_{k, k} & 0_{k, n-k} \end{pmatrix}$$

D'où

$$u(A) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} & \cdots & \frac{U^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & U(\alpha) \end{pmatrix}$$

24. (a) Pour tout $1 \leq j \leq n$, la colonne C_j de G peut s'écrire $C_j = z_j Y$ avec $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, donc $\text{rg}(G) \leq 1$. Comme Y et Z sont non nuls, alors il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_{j_0} = z_{j_0} Y \neq 0$ et par conséquent $\text{rg}(G) = 1$. De plus Y engendre $\text{Im } G$, d'où $\text{Im } G = \text{Vect}(Y)$.
- (b) On a $G^2 = Y({}^t Z Y){}^t Z$ avec $\lambda = {}^t Z Y$ un scalaire, donc $G^2 = \lambda G$, ainsi $X(X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de G , donc $\text{Sp}(G) \subset \{0, {}^t Z Y\}$. Comme $\text{rg } G = 1$, 0 est une valeur propre de G et comme $G^2 \neq 0$, alors λ est nécessairement une valeur propre de G . D'où

$$\text{Sp}(G) = \{0, {}^t Z Y\}.$$

- (c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $|{}^t Z Y|^2 \leq ({}^t Y Y)({}^t Z Z) = 1$, d'où $\varrho(A) = |{}^t Z Y| \leq 1 < R_u$, donc $G \in \mathbb{M}_n(u)$.
- (d) Dans ce cas $\text{Sp}(G) = \{0, {}^t Z Y\}$ et donc $\varphi_G(X) = X(X - \lambda)$.
- (e) D'après ce qui précède il existe un polynôme $P(X) = a + bX$ de degré inférieur ou égal à 1 tel que $u(G) = a\mathbf{I}_n + bG$ avec $a = P(0) = U(0)$ et $P(\lambda) = a + b\lambda = U(\lambda)$ ce qui donne $b = \frac{U(\lambda) - U(0)}{\lambda}$, d'où :

$$u(G) = U(0)\mathbf{I}_n + \frac{u({}^t Z Y) - U(0)}{{}^t Z Y} G.$$

- (f) Toujours $u(G)$ est de la forme $a\mathbf{I}_n + bG$ avec $a = U(0)$ et $b = U^{(1)}(0)$ (0 est une racine double de φ_G), d'où :

$$u(G) = U(0)\mathbf{I}_n + U^{(1)}(0)G.$$

25. (a) Soient k et l deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq n$. Le coefficient ligne k , colonne l de $F\overline{F}$ vaut :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w^{(k-1)(j-1)} w^{-(j-1)(l-1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (w^{k-l})^{j-1}.$$

Si $k = l$, $w^{k-l} = 1$, et le coefficient vaut $\sum_{j=1}^n 1 = n$.

Si $k \neq l$. On a $-(n-1) \leq k-l \leq n-1$ avec $k-l \neq 0$ et donc, $k-l$ n'est pas multiple de n . Par suite, $w^{k-l} \neq 1$ et $\sum_{j=1}^n (w^{k-l})^{j-1} = \frac{1 - (w^{k-l})^n}{1 - w^{k-l}} = \frac{1 - 1^{k-l}}{1 - w^{k-l}} = 0$. En résumé, $F\overline{F} = \mathbf{I}_n$. Donc F est inversible et $F^{-1} = \overline{F}$.

- (b) Posons $F^2 = (\alpha_{rs})_{1 \leq r, s \leq n}$, on a :

$$\alpha_{rs} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w^{(r-1)(k-1)} w^{(k-1)(s-1)} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w^{(k-1)(r+s-2)} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(w^{(r+s-2)} \right)^k \quad (3)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } r + s = 2 \text{ ou } r + s = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{D'où } F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

- (c) On voit bien que $F^4 = (F^2)^2 = \mathbf{I}_n$. Le polynôme $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de F , donc les valeurs propres de F se trouvent parmi les racines 4-ème de l'unité, en particulier $\varrho(F) = 1$ et $\varrho(F) < R_u$ ce qui montre que $F \in \mathbb{M}_n(u)$.
- (d) Le polynôme minimal de F étant de degré 4, donc il existe des scalaires a, b, c, d tels que $u(F) = a\mathbf{I}_n + bF + cF^2 + dF^3$, avec

$$\begin{cases} a + b + c + d & = U(1) \\ a - b + c - d & = U(-1) \\ a + bi - c - di & = U(i) \\ a - bi - c + di & = U(-i) \end{cases}, \text{ car les racines sont simples}$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} a & = \frac{1}{4}(U(1) + U(-1) - U(i) - U(-i)) \\ b & = \frac{1}{4}(U(1) - U(-1) - iU(i) + iU(-i)) \\ c & = \frac{1}{4}(U(1) + U(-1) + U(i) + U(-i)) \\ d & = \frac{1}{4}(U(1) - U(-1) + iU(i) - iU(-i)) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} u(F) &= \frac{1}{4}(U(1) + U(-1) - U(i) - U(-i))\mathbf{I}_n + \frac{1}{4}(U(1) - U(-1) - iU(i) + iU(-i))F \\ &\quad + \frac{1}{4}(U(1) + U(-1) + U(i) + U(-i))F^2 + \frac{1}{4}(U(1) - U(-1) + iU(i) - iU(-i))F^3 \\ &= \frac{1}{4}(U(1)(F + \mathbf{I}_n) - U(-1)(F - \mathbf{I}_n)(F^2 + \mathbf{I}_n)) \\ &\quad + \frac{1}{4}(U(i)(F + i\mathbf{I}_n) - U(-i)(F - i\mathbf{I}_n)(F^2 - \mathbf{I}_n)) \end{aligned}$$

26. (a) Dans ce cas la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir de $N + 1$, donc $R_u = +\infty$ et par conséquent u satisfait la condition C^* .

De plus, $\forall t \in \mathbf{R}$,

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k = \sum_{k=0}^N \mathfrak{C}_N^k p^k (1-p)^{N-k} t^k = \sum_{k=0}^N \mathfrak{C}_N^k p^k (1-p)^{N-k} (pt)^k = (pt + 1 - p)^N.$$

Considérons le polynôme $R(X) = (pX + 1 - p)^N$, ce polynôme vérifie les conditions qui caractérisent le polynôme Q (la question 13.). Donc

$$u(A) = (pA + (1-p)\mathbf{I}_n)^N.$$

- (b) Dans ce cas $u_k = (1-p)^{k-1}p$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 - p$, donc $R_u = \frac{1}{1-p} > 1$, d'où u vérifie la condition C^* .

A étant diagonalisable, donc il existe P inversible $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ tels que $A = PDP^{-1}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de A . D'après la question 22., on a :

$$u(A) = u(PDP^{-1}) = Pu(D)P^{-1}$$

avec $u(D) = \text{diag}(U(\lambda_1), \dots, U(\lambda_n))$ où

$$U(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda_i^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \lambda_i^k = p \sum_{l=0}^{\infty} [(1-p)t]^l = \frac{p\lambda_i}{1 - (1-p)\lambda_i}.$$

D'autre part, puisque $\varrho(A) < R_u = \frac{1}{1-p}$, alors la matrice $\mathbf{I}_n - (1-p)A$ est inversible et semblable à $\text{diag}(1 - (1-p)\lambda_i)$. D'où

$$\begin{aligned}
 u(A) &= Pu(D)P^{-1} \\
 &= P \text{diag}(p\lambda_i, 1 \leq i \leq n) \text{diag} \left(\frac{1}{1 - (1-p)\lambda_i}, 1 \leq i \leq n \right) P^{-1} \\
 &= pP \text{diag}(\lambda_i, 1 \leq i \leq n) P^{-1} P \text{diag} \left(\frac{1}{1 - (1-p)\lambda_i}, 1 \leq i \leq n \right) P^{-1} \\
 &= pA(\mathbf{I}_n - (1-p)A)^{-1}.
 \end{aligned}$$

•••••